

基于真实汽车工程情境的导数教学设计 ——经济车速优化案例

刘小艳 陈彦恒

重庆三峡科技大学数学与统计学院学院, 重庆 404120

摘要:高中数学导数“解决实际问题”的教学存在情境固化、建模过程简化的问题, 制约学生建模素养培养。本文以“经济车速”这一车辆工程的经典优化问题为载体, 打通数学、物理与工程学科壁垒, 构建了一节导数应用的跨学科建模课例。学生将经历从真实现象到数学抽象的完整探究: 定性分析油耗规律, 拟合二次函数模型, 利用导数求取最优解, 再回归情境验证迁移。在这一过程中, 导数不再是冰冷的公式, 而是驾驭真实系统、寻求“最优”的有力武器。

关键词:导数应用; 数学建模; 5E教学模式; 经济车速; 跨学科教学

DOI: 10.64649/yh.jydk.issn3080-2660.202607037

0 引言

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》将数学建模确立为六大核心素养之一, 要求学生“能够在实际情境中发现、提出问题、分析问题、建立模型、求解模型”^[1]。导数作为刻画瞬时变化率的数学工具, 它的实际应用教学兼具基础性与挑战性, 是落实数学建模素养的关键场域。多项教学调研显示, 当前高中导数“解决实际问题教学”存在的问题: 教材中高台跳水、商业利润优化等实例, 虽在模型结构上具有典型性, 却与高中生的日常生活经验存在一定距离^[2]。学生极少亲历跳水场景, 商业情境也超出了大多数学生的认知范畴。这种距离导致学生面对此类题目时缺乏代入感, 建模活动容易沦为机械的“套公式”操作, 建模过程中最核心的“从现象中抽象变量、自主构建函数关系”环节被省略^[3]。

基于上述思考, 本文以汽车“经济车速”——即百公里油耗最低的行驶车速, 这一真实的车辆工程问题为载体, 设计一节导数应用建模课例。该情境具有三方面教学优势: 其一, 汽车已成为中国城镇家庭的日常出行工具, 车速与油耗的关系是学生可能有过直观体验的生活现象; 其二, 车速与油耗之间呈现出一种有趣的U型关系——车速并非越低越省油, 也并非越高越省油, 而是存在一个“最省油的车速”, 即车辆工程中所说的经济车速, 这一真实工程问题为导数教学提供了理想的情境; 其三, 该问题涉及数学建模的完整环节——从实际数据出发, 自主选择拟合模型, 利用导数求解, 再到结果验证与工程意义解释。本文尝试探索一条以真实情境建构驱动导数建模教学、沟通数学工具与真实世界的教学路径^{[4][5]}。

1 教学设计

1.1 教学内容的定位与分析

本设计对应人教A版选择性必修第二册第五章第三节“导数的实际应用”的第2课时, 面向高二年级学生。学生在之前的学习中已掌握导数的定义、基本求导公式、导数与函数单调性及极值的关系, 具备利用导数求函数最值的基本技能^[2]。本课时的核心任务是让学生在真实情境中经历完整的建模过程, 将导数求最值的方法迁移到实际的工程优化问题中。

1.2 教学目标

依据《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》的要求^[1], 结合本节课的教学内容与高二年级学生学情, 制定如下教学目标:

(1) 通过“经济车速”真实问题情境的引入与分析, 学生能经历从实际数据出发、自主选择函数模型(二次函数)拟合车速-油耗关系的完整过程, 在此过程中发展数学建模与数据分析的核心素养。

(2) 通过小组合作利用Excel或GeoGebra进行数据拟合与模型对比(线性函数与二次函数), 使学生理解数学模型的选择需要有依据, 初步建立“多因素耦合影响实际问题”的工程系统思维, 在此过程中发展逻辑推理与直观想象的核心素养。

(3) 借助导数公式求解拟合函数的最值, 让学生进行结果校验, 从而使掌握导数工具在真实优化问题中的操作路径, 锻炼学生的数学运算能力;

教学重点:构建车速-油耗函数模型, 利用导数求解实际优化问题的最值。

教学难点:将实际油耗数据转化为目标函数模型, 并理解数学结果在工程上的意义。

学情预设:学生已学过导数的基本求导公式和函数极值求法, 也具备基础物理力学常识, 对汽车有日常了解, 但对工程建模和误差分析

还存在部分问题。

建议课时：1课时（45分钟）。

1.3 教学流程设计

本设计以5E教学模式为框架，将真实情境建构下建模教学的五项策略融入各个环节，具体设计如下^{[6][7]}。

1.3.1 引入（Engage）

情境创设：教师播放一段自制视频，画面聚焦在汽车仪表盘上，汽车车速从40km/h逐渐升至120km/h，而瞬时油耗数值呈现先下降后上升的变化趋势。定格画面后提问：“车速从40km/h提高到120km/h，为什么油耗不是越来越高，而是先下降后上升呢？到底开多快最省油呢？”教师提问：“生活中我们常觉得‘开得越慢越省油’，这个想法到底对不对呢？”

设计意图：从学生熟悉但从未深究的日常现象切入，用反直觉的数据制造认知冲突。多数人认为车速提高会增加油耗，实际数据显示并非如此。这种矛盾能激发学生的探究欲望。张根平教授指出，创设生活情境的目的是让学生接触建模时不会感到陌生，逐步进入建模的思考状态^[3]。本环节没有任何公式和计算，只用生活现象来引出核心问题——是否存在一个最省油的车速，为后续建模活动做好情境准备。

1.3.2 探究（Explore）

本环节包含三个递进步骤，引导学生将“油耗与车速的关系”这一生活问题逐步转化为可以分析的数学问题。

步骤一：定性分析

学生以4人为一小组讨论两个问题：①根据你的乘车经验，猜想一下油耗和车速大致是什么关系？②你能画出车速—油耗关系的大致示意图吗？各小组画出草图后，教师选取2~3组展示，最后学生基本能得出车速—油耗的关系是“先降后升”。

步骤二：工程原理解释

教师结合图1讲解U型曲线形成原因（仅定性讲解）：

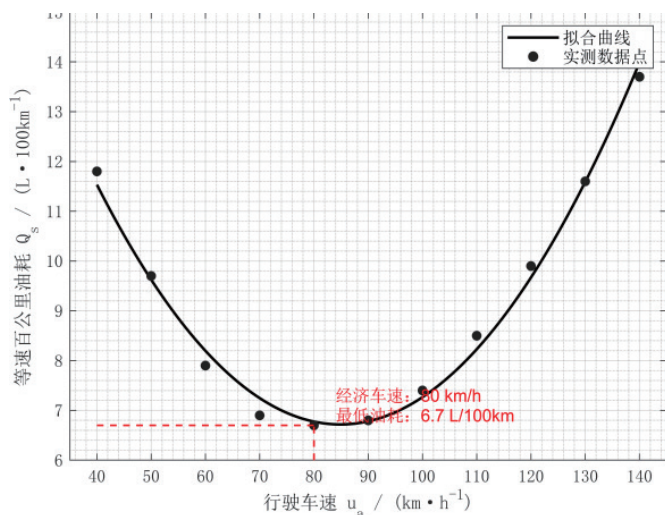


图1 汽车等速百公里油耗随车速变化曲线

低速区间（40~60km/h）：发动机负荷率过低，有效燃油消耗率偏高，单位里程油耗较大。通俗地说，发动机“有劲使不出”，效率低下^[8]。

中速区（60~90km/h）：发动机进入高效工作区间，负荷率适中，油耗较低。

高速区间（100km/h以上）：车辆空气阻力满足 $F_w = \frac{1}{2} C_D A \rho v^2$ ，与车速平方成正比，车速越高，克服风阻消耗的燃油越多，油耗快速上升^[8]。

模型假设：为了简化问题，本次探究统一设定平直路面、无风、匀速行驶、车辆满载状态不变，排除坡度、风速、载重等干扰因素^[9]。

教师特别指出：空气阻力公式中出现 V^2 （车速的平方），这提示油耗与车速之间可能不是线性关系，而更接近二次函数关系。

设计意图：让学生理解数学模型的选择不是任意的，而是有物理原理作为依据。罗静彦在跨学科融合实践研究中指出，跨学科问题的解决需要学生在其他学科的知识 and 思维方法上有一定积累^[10]。本环节的工程原理解释为后续数学建模奠定了跨学科的知识基础。

步骤三：定量建模

提供表1某.6L家用轿车在平直路面、无风、匀速工况下实测数据。

表1某车型车速—等速百公里油耗实测数据

车速 $V(\text{km/h})$	40	50	60	70	80	90	100	110	120
油耗 $Q(\text{L}/100\text{km})$	7.8	7.0	6.5	6.2	6.1	6.3	6.8	7.6	8.5

各小组利用 Excel 或 GeoGebra 尝试不同函数模型拟合数据。教师巡回指导，提示学生线性函数是否能拟合成“先降后升”的走势？二次函数呢？各小组在操作过程中发现线性函数无法刻画“先降后升”的走势（直线只能单调变化），而二次函数的抛物线形状与数据趋势吻合良好。

设计意图：这一环节让学生从“被动接受模型”转变为“主动选择模型”。在传统教学中，教师通常直接给出 $Q=av^2+bv+c$ 的表达式，学生只需代入求导。本设计将“模型选择”这一建模过程中最核心的决策步骤交还给学生，让学生真正经历“将实际数据转化为数学模型”的完整认知过程。

1.3.3 解释（Explain）

步骤一：各组汇报拟合结果

邀请2~3个小组展示拟合结果，统一参考拟合函数为：

$$Q(v)=0.0008v^2-0.12v+10.8(40 \leq v \leq 120)$$

步骤二：导数求解与最值判断

①求导： $Q'(v)=0.0016v-0.12$ ；

②令 $Q'(v)=0$ ，解得驻点

$$v = \frac{0.12}{0.0016} = 75(\text{km/h})。$$

结合二次项系数 $0.0008 > 0$ ，函数图像开口向上，因此 $v=75\text{km/h}$ 是函数极小值点，即该车型经济车速为 75km/h 。

步骤三：结果验证与模型误差分析

①数据验证：对照表1实测数据， $70\sim 80\text{km/h}$ 区间油耗最低，与计算结果 75km/h 一致；

②工程文献验证：根据余志生《汽车理论》中的统计，主流家用燃油轿车在平直路面匀速行驶时的经济车速普遍集中在 $60\sim 90\text{km/h}$ 区间，本计算结果 75km/h 符合车辆工程的行业共识^[8]；

③误差分析：引导学生思考哪些现实因素会影响到计算所得经济车速，如风速、道路坡度、轮胎气压、载重变化、驾驶习惯等都有可能影响实际油耗，培养学生的发散性思维，让学生知道数学模型是对现实的合理简化而非完全精确的复制。

设计意图：本环节落实了张根平教授提出的“指导建模方法、规范解题流程”策略——教师带着学生按照“设定变量→构建关系式→推导结果→关联实际意义”的流程逐步操作，确保学生清楚每一步的设计意义。

1.3.4 迁移 (Elaborate)

设置三个开放性问题，引导学生将导数优化思想向工程应用迁移。

问题一：“如果你是汽车工程师，导数还可以用来优化汽车的哪些设计参数？”引导学生从经济车速模型中迁移思维：比如优化空气动力学外形（减小风阻系数 C_D ）、优化传动比匹配、优化电动汽车的续航—车速匹配等。

问题二：“高速公路限速 120km/h ，除了安全因素，有何节能考量？”引导学生分析表1数据： $100\text{km/h}\sim 120\text{km/h}$ ，油耗从 $.8\text{L}$ 升至 $.5\text{L}$ ，增幅约 5% ，限速的节能效果很明显。

问题三：“换一辆高大型UV，经济车速还是 75km/h 吗？”引导学生理解：车重、风阻系数、发动机特性等不同，拟合参数会随之改变，最优解自然不是固定的。

设计意图：本环节对应5E模式的知识应用与拓展阶段，也落实了张根平提出的“组织实践探究”策略。三道题分别从优化目标的拓展、最优值的现实解读、模型参数的敏感性这三个角度切入，引导学生看到数学工具在复杂工程情境中是可以迁移着用的。

1.3.5 评价 (Evaluate)

结合5E模式评价要求，采用教师评价、小组互评与学生自评相结合的三维评价方式^[7]。教师在课堂上观察学生的建模参与度、导数求解规范性、对误差分析理解程度等维度开展过

程性评价；小组之间互相打分，重点看数据拟合合理、模型选得有没有道理；学生自己则回头反思整个建模流程有没有完整走下来，完成自评。三维评价贯穿课前、课中、课后全过程，既关注学习结果，也重视建模过程中的思维发展与素养表现^[4]。

针对不同层次学生的学习需求，设置分层课后任务^[4]。基础任务面向全体学生，要求利用表2中SUV车型的实测数据，完成二次函数拟合、求导计算并求解经济车速，按规范书写完整解题步骤；提升任务面向学优生，要求对比轿车与SUV的拟合函数及经济车速差异，从二次项系数等数学特征和车重、风阻系数等工程特性两个维度分析原因，并撰写150字左右的简短建模分析报告；拓展任务供兴趣小组选做，鼓励学生尝试用三次函数对同一组数据进行拟合，对比二次函数与三次函数的拟合效果，分析两种模型在刻画“先降后升”趋势时的优缺点。

表2 SUV车型车速—等速百公里油耗实测数据

车速 $V(\text{km/h})$	40	60	80	100	120
油耗 $Q(\text{L}/100\text{km})$	10.5	8.8	8.0	9.2	11.5

设计意图：本环节体现多元评价思路。评价维度包括建模过程的规范性、学习参与的主动性和成果呈现的质量。评价方式有教师评价、学生自评和小组互评。多元评价的落脚点不在于甄别优劣，而在于促使学生发现自身在建模过程中的优势与不足，为教学调整提供精准依据。

2 教学反思

2.1 真实情境对建模兴趣的激发

传统导数优化问题常设置纯商业或几何类的理想化情境，学生只能被动解题，很难体会到数学的实际价值。本设计选取汽车油耗这一生活化工程问题作为载体，把“求最优解”转变为“探究怎样开车更省油”的实践性任务，从而激发学生主动探究的内在动力。情境认知理论认为，真实的工程情境有助于学生建立数学符号与现实规律之间的联系，帮助他们纠正“导数只是代数运算”的片面认识。从课堂预设来看，学生对误差分析、车型对比等延伸内容表现出明显高于传统例题的探究意愿。

2.2 分层设计与课堂弹性的实施策略

本设计设置弹性任务，适配不同学情班级：

基础薄弱班级：直接给出二次函数模型，弱化数据拟合环节，将教学重心放在导数求解、定义域判断、极值与最值区分三大核心知识点上，降低技术操作门槛^[6]。

基础较好班级：增加多函数对比拟合、三次函数建模等探究任务，引导学生讨论模型的

适用性与局限性,深化建模思维。

课堂时间管控建议:数据拟合环节易出现耗时不均,容易把节奏拖散。建议教师提前准备一份预拟合好的数据来应对课堂节奏波动,保证课堂顺利进行。

2.3 研究局限与展望

目前这篇设计还停留在纸面上,没有拿进课堂实际验证过。后续计划开展教学实验,通过前后测、课堂访谈、作业分析等方式,量化评估本设计在提升学生建模素养和导数应用能力方面的效果。另外还计划开发一系列“数学+车辆工程”方向的跨学科微课程,比如变速器传动比与函数极值的关系、轮胎滑移率怎么体现变化率、新能源汽车的能耗优化问题等,逐步形成课程群。

3 结语

导数是核心数学工具,用于描述瞬时变化

率与解决优化问题。其教学价值不限于公式记忆和习题训练,更在于培养学生运用数学解释现实、解决实际问题的综合能力。本文以5E探究教学模式为框架,选取车辆工程中的经济车速作为跨学科载体,构建了“工程现象—数学建模—导数求解—工程检验”的闭环教学流程,该流程将数学建模核心素养的培养要求完整地落实到了每一个环节。

该设计让高中数学与工程技术产生了实质性交集,抽象的微积分知识因此能在生活情境中落地。传统导数教学情境固化的问题随之得到改善,同时也为STEM跨学科教学做出了一个可复制的示范。在基础教育跨学科改革推进的当下,具备复合学科背景的教师可以充分利用自身专业积累,挖掘更多理工融合的教学切入点,使数学真正成为学生认识世界、解决问题的通用工具,进而支撑起核心素养的全面发展。

参考文献:

- [1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)[S].北京:人民教育出版社,2020.
- [2] 曹一鸣,孙彬博,苏明宇,等.促进学生核心素养发展的高中数学单元教学设计——以“导数及其应用”为例[J].基础教育课程,2023,(6):34-43.
- [3] 张根平.真实情境建构下高中数学应用建模教学策略探究[J].学苑教育,2026,(19):34-36.
- [4] 张艺娜.基于5E教学模式培养高一学生数学建模素养的实践研究[D].闽南师范大学,2025.
- [5] 何正文.高中数学课堂培养学生建模思维的实践与思考——以曼哈顿距离问题为例[J].理科考试研究,2025,32(4):61-63.
- [6] 邵风静.高中数学导数教学中实际应用案例的设计与实践[J].当代家庭教育,2026,(4):81-83.
- [7] 李浓伊.融入STEAM教育理念的初中数学5E教学模式研究[D].吉首大学,2025.
- [8] 余志生.汽车理论(第6版)[M].北京:机械工业出版社,2018:58-72.
- [9] 吴建华,孙丽.汽车发动机原理(第3版)[M].北京:机械工业出版社,2020.
- [10] 罗静彦.新课标背景下初中数学教学中跨学科融合的实践研究[J].中关村,2025,(3):204-206.
- [11] 尚颖异.基于STEM理念的数学探究式教学模式的实践研究[D].江西师范大学,2020.

作者简介:刘小艳(2002.01—),女,汉族,重庆市云阳县,研究生在读,研究方向:数学教育。
陈彦恒(1980.12—),男,汉族,河南西平,研究生,教授,研究方向:数学教育、教学设计。