ISSN：3080-2660
EISSN：3080-2679

定积分在物理学上的应用

霍承刚　姚慧子

宿州学院数学与统计学院，安徽 宿州 234000

摘　要：定积分是高等数学微积分体系的核心内容，也是连接数学理论与物理实际的重要桥梁。物理学中大量变量作用、连续分布、累积效应类问题，无法通过初等数学公式直接求解，而定积分的“分割、近似、求和、取极限”核心思想，可精准解决连续物理量的累积计算问题。本文以微元法为核心工具，结合实例探究定积分在经典物理学中的应用，涵盖变力沿直线做功、水压力、万有引力等物理场景，为物理定量分析、工程力学计算提供理论与实践参考。

关键词：高等数学；定积分；微元法

DOI：10.64649/yh.jydk.issn3080-2660.202606025

0 引言

数学是物理学的基础工具，所有物理规律的定量表达、物理问题的精准求解，均离不开数学方法的支撑。定积分作为处理连续变化量累积问题的专属数学工具，突破了初等数学仅能计算恒定物理量的局限，完美适配物理学中多数动态、连续变化的物理过程。

在经典物理体系中，无论是力、速度、压强、引力等物理量的持续作用效果，还是质量、能量、力矩等连续分布物理量的整体效应，本质均为“无限多个微元量的累积总和”，与定积分的核心定义高度契合。微元法作为定积分解决物理问题的核心思想，通过将复杂的整体物理过程分割为无数个微小的、可近似为恒定状态的微元过程，建立微元物理量的积分表达式，最终通过定积分运算求解整体物理量，实现了物理问题的数学化、精准化求解[1][2][3]。本文基于微元法，分类探究定积分在经典物理场景中的一些具体应用，梳理解题思路与应用规律。

1 定积分在经典物理学中的具体应用

1.1 变力沿直线所做的功

例 一物体按规律 $x=ct^3$ 作直线运动，介质的阻力与速度的平方成正比．计算物体由 $x=0$ 移动到 $x=a$ 时，克服介质阻力所作的功。

解 速度为 $v=\dfrac{dx}{dt}=3ct^2$，阻力为 $R=kv^2=9kc^2t^4$，由此得到 $dW=Rdx=27kc^3t^6dt$。

设当 $t=T$ 时，$x=a$，得 $T=\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\frac{1}{3}}$，故

$$W=\int_0^T 27kc^3t^6dt=\frac{27kc^3}{7}T^7=\frac{27}{7}kc^{\frac{2}{3}}a^{\frac{7}{3}}.$$

例 从地面垂直向上发射质量为 m 的火箭，当火箭距离地面 r 时，求克服地球引力做的功．若火箭要脱离地球引力范围，火箭应具备多大的初速度？

解 设火箭距离地面 x，由万有引力定律，火箭受到的地球引力为

$$F=K\cdot\frac{Mm}{(R+x)^2},$$

当 $x=0$ 时，$F=mg$，即 $mg=K\cdot\dfrac{Mm}{R^2}\Rightarrow K=\dfrac{R^2g}{M}$，故 $F=F(x)=\dfrac{R^2}{(R+x)^2}mg.$

任取 $[x,x+dx]\subset(0,r)$，功微元为

$$dW=F(x)dx=\frac{R^2}{(R+x)^2}mgdx,$$

故火箭克服地球引力所做的功为

$$W=\int_0^r\frac{R^2}{(R+x)^2}mgdx=R^2mg\left[-\frac{1}{R+x}\right]_0^r=R^2mg\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+r}\right).$$

当火箭脱离地球时，火箭克服引力所做的功为

$$W=\lim_{r\to+\infty}R^2mg\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+r}\right)=mgR.$$

由于 $mgR=\dfrac{1}{2}mv_0^2$　（v_0为火箭的初速度），

故 $v_0=\sqrt{2Rg}=11.2(km/s)$　（第二宇宙速度）．

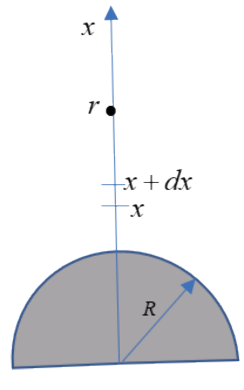

图1 建立坐标系

ISSN：3080-2660
EISSN：3080-2679

1.2 水压力

例 现有一竖直矩形闸门，宽 2m，高 3m，上边缘与水面齐平，水的密度 $p=1000kg/m^3$，重力加速度 $g=9.8m/s^2$，求闸门所受水的静压力。

解 选取深度 h 为积分变量，区间 [0,3]，深度 h 处取微元高度 dh，对应面积微元 $dS=2dh$，压力微元：$dF=pgh\cdot 2dh=2pghdh$。

积分求解总压力：

$$F=\int_0^3 2\rho ghdh=\int_0^3 2\times1000\times9.8\times hdh=19600\times\frac{1}{2}h^2\Big|_0^3=88200N.$$

注：该方法广泛应用于堤坝、水箱、船舶承压结构的受力计算，是流体静力学定量分析的重要手段[4]。

例 斜边为定长的直角三角形薄板，垂直放置于水中，并使一直角边与水面相齐，问斜边与水面交成的锐角 θ 取多大时，薄板所受的压力 P 最大。

解 选取坐标系如图 . 设斜边长为 l，则其方程为 $y=-\cot\theta\cdot x+l\cos\theta.$

$$P=\int_0^{l\sin\theta}\rho gyxdx$$

$$=\rho g\int_0^{l\sin\theta}(-x^2\cot\theta+lx\cos\theta)dx$$

$$=\frac{\rho gl^3}{6}(\cos\theta-\cos^3\theta)$$

令 $\dfrac{dP}{d\theta}=0$，即 $-\sin\theta+3\cos^2\theta\sin\theta=0$。

因为 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，故得唯一驻点

$\theta_0=\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，由实际意义可知最大值存在，

故此唯一驻点 θ_0 即为所求。

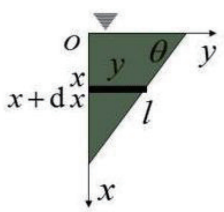

图2 建立坐标系

1.3 万有引力

例 设有一个长度为 l、线密度为 u 的均匀细直棒，在棒的一端垂直距离为单位 a 处有一个质量为 m 的质点 M，试求这细棒对质点 M 的引力。

解 如图设立坐标系，取 y 为积分变量，则 y 的变化范围为 [0,1]，对应小区间 $[y,y+dy]$ 与质点 M 的引力的大小的近似值为 $dF=G\dfrac{m\mu dx}{r^2}$，

其中 $r=\sqrt{a^2+x^2}$，

把该力分解，得到 x 轴、y 轴方向的分量分别为

$$dF_x=-\frac{a}{r}dF=-G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx,$$

$$dF_y=-\frac{x}{r}dF=G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx,$$

因此，

$$F_x=\int_0^l -G\frac{am\mu}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx\underline{\underline{x=a\tan t}}-G\frac{m\mu}{a}\int_0^{\arctan\frac{l}{a}}\cos tdt=-\frac{Gm\mu l}{a\sqrt{a^2+l^2}},$$

$$F_y=\int_0^l G\frac{m\mu x}{(a^2+x^2)^{3/2}}dx=\left[-G\frac{m\mu}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^l=m\mu G\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+l^2}}\right).$$

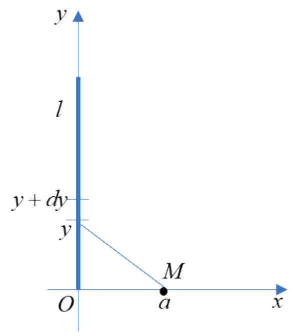

图3 建立坐标系

例 （2026. 数Ⅱ）设线密度为 1 的细直棒的两个端点分别位于 $(-1,0)$ 和 $(1,0)$ 处，质量为 m 的质点位于点 $(1,0)$ 处，设 G 为引力常数，则该细直棒对质点的引力为（ ）

A、$\displaystyle\int_0^1\frac{2Gmx}{(1+x^2)^{1/2}}dx$ B、$\displaystyle\int_0^1\frac{2Gm}{(1+x^2)^{1/2}}dx$

C、$\displaystyle\int_0^1\frac{2Gmx}{(1+x^2)^{3/2}}dx$ D、$\displaystyle\int_0^1\frac{2Gm}{(1+x^2)^{3/2}}dx$

解 如下图，取 x 为积分变量，其变化区间为 $\left[-\dfrac{l}{2},\dfrac{l}{2}\right]$. 在 $\left[-\dfrac{l}{2},\dfrac{l}{2}\right]$ 内任取一小区间 $[x,x+dx]$，对应这一小段细直棒视为质量集中于 x 处的质点，其质量为 $1\cdot dx$，由万有引力定律，该小段

细棒对质点 m 的引力大小为 $dF = G \cdot \frac{1 \cdot dx \cdot m}{a^2 + x^2}$.

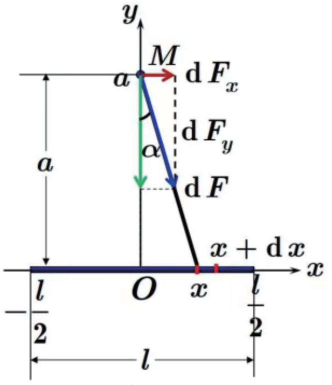

图4 建立坐标系

由于细直棒上各点对质点的引力方向是变化的，所以对引力作 x,y 轴上的分解，故有

$$dF_x = G \cdot \frac{mdx}{a^2 + x^2} \sin\alpha = \frac{Gmx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx,$$

$$dF_y = -G \cdot \frac{mdx}{a^2 + x^2} \cos\alpha = -\frac{Gma}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx.$$

由定积分偶倍奇零的计算性质可知，$F_x=0$。而 $F_y = -\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{Gma}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx = -\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{2Gma}{(a^2 + x^2)^{3/2}} dx.$

取 $l=2,a=1$，只考虑大小，则

$$F_y = \int_0^1 \frac{2Gm}{(1 + x^2)^{3/2}} dx.$$ 故正确选项为 D。

2 结束语

定积分作为处理连续累积问题的核心数学工具，完美适配经典物理学中变速运动、变力作用、流体压强、连续引力等各类复杂物理场景，突破了初等数学的解题局限，实现了物理定量分析的精准化、系统化。

随着物理研究的深入，复杂连续场、变参数物理过程的求解需求不断增加，定积分的应用场景将进一步拓展。同时，结合重积分、曲线积分等多元积分工具，可解决更复杂的三维物理问题，为现代物理学及工程技术的发展提供更坚实的数学支撑。

参考文献：

[1] 同济大学数学科学学院 . 高等数学（第八版）[M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2023.

[2] 程守洙 , 江之永 . 普通物理学（第七版）[M]. 北京 : 高等教育出版社 ,2019.

[3] 韩艺兵 , 文生兰 , 贯瑞玲 . 定积分微元法的应用探讨 [J]. 理论数学 ,2024,14(6):282−288. DOI:10.12677/pm.2024.146248.

[4] 靳海芹 . 大学物理中几种不同变力做功问题的探讨 [J]. 湖北第二师范学院学报 ,2012,29(02):112−115.

作者简介：霍承刚（1980—），男，山东德州人，副教授，硕士，研究方向：高等数学教育教学研究。

项目信息：安徽省高等学校省级质量工程项目（高等数学 A（一））（2024aijy380）；宿州学院校级质量工程项目（教材建设：高等数学自主学习与考研竞赛指导（szxy2025jcjs04））；宿州学院校级课程思政建设研究项（szxy2024ksjy12）、宿州学院“AI+ 教育”课程项目（szxy2025aijy06）。