ISSN：3080–2660
EISSN：3080–2679

数学专业师范生实变函数课程中的反例教学

许俊莲

宝鸡文理学院数学与信息科学学院，陕西 宝鸡 721013

摘　要：实变函数作为数学专业的核心课程，在培养师范生的抽象思维、逻辑推理和解决问题能力等综合素养方面发挥着重要的作用。 基于该课程抽象性和复杂性较高的特点，学生在学习的过程中容易产生畏难心理。本文针对实变函数课程中的几个问题，结合具体条件，构造恰当反例并给出证明过程．从而让学生更容易、更直观理解和掌握基本概念和定理，调动学生学习的积极性。

关键词：可测函数；勒贝格积分；依测度收敛；卢津定理；叶果洛夫定理

DOI：10.64649/yh.jydk.issn3080–2660.202604018

0 引言

实变函数是大学数学专业的一门必修课程，它是数学分析课程学习的深入，为后续学习概率论与数理统计、泛函分析等课程提供必备的理论基础，在分析数学中起到了承前启后的作用，是连接经典数学与现代数学的桥梁．在数学专业师范生的培养过程中，实变函数也起到了重要的作用。作为素养培育的核心课程，一方面，完善师范生的分析学知识体系，让师范生深刻理解中学数学知识的本质与延伸；另一方面，提升师范生的数学抽象思维、逻辑推理、和严谨论证能力，为他们开展中学数学教学研究，教材分析，教学改革奠定理论基础。

实变函数课程具有理论性强、抽象度高的显著特点，对学生的逻辑思维和数学基础要求较高，被认为是难度较高的专业核心课程。在教学过程中，为了加深学生对概念和定理的理解掌握，往往会对重要概念和定理进行注解和说明。在这个过程中，一种有效的教学手段就是反例教学，通过例举一些具体的反例让学生产生直观的印象，从而更容易接受、理解、辨析概念及定理的条件和使用范围。到目前为止，已经有一些学者总结讨论了反例在实变函数课程教学中的应用[1][2][3][4][5]。本文将结合师范生实变函数课程内容，总结探讨反例在各个知识点中的应用，从而提升课堂的教学效果，增强学生的综合素养，实现教育目标。

1 可测函数与连续函数的关系

连续函数是数学分析中一类重要的函数，通过可测函数的定义可以判断，可测集上的连续函数一定是可测函数。反过来，可测函数是否连续？答案是否定的，比如狄利克雷函数。下面的卢津定理说明它们之间确实存在着一定的关系。

定理 1[6] 设 $f(x)$ 是 E 上几乎处处有限的可测函数，则对任意 $\delta>0$，存在闭子集 $F_\delta\subset E$，使 $f(x)$ 在 F_δ 上是连续函数，且 $m(E\backslash F_\delta)<\delta$。

值得强调是卢津定理不能改为：存在闭子集 $F\subset E$，使 $f(x)$ 在 F 上是连续函数，且 $m(E\backslash F)=0$。为了给出一个反例，首先构造下面的类 Contor 集 S。

在区间 [0,1] 中以 ½ 为中心，去掉长度为 ¼ 的开区间 $(\frac{3}{8},\frac{5}{8})$，剩下两个闭区间 $[0,\frac{3}{8}]$，$[\frac{5}{8},1]$；再分别以这两个闭区间的中点为中心，去掉长度为 $\frac{1}{4^2}$ 的开区间；按照此方法一直进行下去，就从 [0,1] 去掉了可数多个互不相交且没有公共端点的开区间，剩下的必是一个闭集，记为 S。显然，S 无内点且 $mS=\frac{1}{2}$。

例 1[1] 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\in S,\\ -1, & x\in[0,1]\backslash S,\end{cases}$ 则对 [0,1] 中的任一零测度集 A，$f(x)$ 在 $[0,1]\backslash A$ 上不连续。证明 仅说明 $f(x)$ 在 $([0,1]\backslash A\cap S)$ 上不连续，任给 $x_0\in([0,1]\backslash A\cap S)$，及 $\delta>0$，由于 S 无内点，故 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap([0,1]\backslash(A\cup S))\neq\varnothing$。取 $\varepsilon=1$，对任意 $\delta>0$，存在 $x'\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap([0,1]\backslash(A\cup S))$，则 $f(x')=-1$ 且 $|f(x')-f(x_0)|=2>1$，因此 $f(x)$ 在 x_0 点不连续。

在例 1 中，根据 $f(x)$ 的定义可知，$f(x)$ 在 [0,1] 上可测，但对任意零测度集 A，$f(x)$ 在 $[0,1]\backslash A$ 上不连续，因此，满足条件的闭子集 F 不存在。

2 可测函数列几种收敛之间的关系

在数学分析中，系统学习了函数列在一个集合上的处处收敛性和一致收敛性。可知，一致收敛的函数列一定处处收敛。一般情况下，处处收敛不能保证一致收敛。下面的叶果洛夫定理说明，在一定条件下，几乎处处收敛的可测函数列是“基本上”一致收敛的。

ISSN：3080–2660
EISSN：3080–2679

定理 2[6] 设 $mE<\infty$，$\{fn\}$ 是 E 上一列几乎处处收敛于一个几乎处处有限的函数 f，则对任意 $\delta>0$，存在子集 $E_\delta\subset E$，使 $\{fn\}$ 在 E_δ 上一致收敛，且 $m(E\backslash E_\delta)<\delta$。

在定理 2 中条件 $mE<\infty$ 不可少，当 $mE=\infty$ 时，定理不成立。

例 2[7] 考虑区间 $E=(0,\infty)$ 上的函数列 $f_n(x)=\dfrac{x}{n},n=1,2,\cdots$，则任给 $x\in E$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$。但对于任意的 $\delta>0$，不能 E 从中去掉一个测度小于 δ 的子集 E_δ，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 0。

证明（反证法）对于任意的 $\delta>0$，假设存在 $E_\delta\subset E$，且 $mE_\delta<\delta$，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E\backslash E_\delta$ 上一致收敛于 0。即对于 $\varepsilon=1$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，任给 $x\in E\backslash E_\delta$，有 $|f_n(x)|<1$，从而 $0<x<n$，则 $E\backslash E_\delta\subset(0,n)$。由此可知 $E\subset E_\delta\bigcup(0,n)$，所以 $mE\leq\delta+n$，这与 $mE=\infty$ 矛盾，得证。

此外，定理 2 不能改为：存在子集 $F\subset E$，使 $\{fn\}$ 在 F 上一致收敛于 f，且 $m(E\backslash F)=0$。

例 3[1] 考虑区间 $E=[0,1]$ 上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & x=0\text{或}x\in[\frac{1}{n},1],\\ 1, & x\in[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1}),\\ \text{线性函数}, & \text{其它},\end{cases}$$

可知 $f_n(x)$ 为 E 上的连续函数，即为可测函数。对于任给 $x\in E\backslash\{0\}$，存在 n，使得 $x\geq\dfrac{1}{n}$，此时 $f_n(x)=0$，且当 $m>n$ 时，$f_m(x)=0$，从而推出 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$。

若存在 $E_0\subset E$，且 $mE_0=0$，使得 $\{f_n(x)\}$ 在 $E\backslash E_0$ 上一致收敛于 0。由于点 $x=0$ 是集合 $E\backslash E_0$ 的聚点，则存在数列 $\{x_k\}\subset E\backslash E_0$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0$。因此，对任意 $N>0$，存在 $k>N$，使得 $0<x_k<\dfrac{1}{N+1}$。进一步，存在 $n\geq0$，使得 $\dfrac{1}{N+n+2}\leq x_k<\dfrac{1}{N+n+1}$。此时有 $f_{N+n}(x_x)=1$ 且 $x_k\subset E\backslash E_0$。这与 $\{f_n(x)\}$ 在 $E\backslash E_0$ 上一致收敛于 0 矛盾。

在实变函数中，引入测度概念后，利用测度描述了函数列的收敛，即依测度收敛。依测度收敛和收敛之间有没有强弱关系？下面例子说明依测度收敛不能蕴含几乎处处收敛。

例 4[7] 设 $E=(0,1]$，对任意的正整数 n，对于任意 $x\in E$，定义函数

$$f_j^{(n)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\\ 0, & x\notin\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right],\end{cases}$$

其中 $j=1,2,\cdots,2^n$. 将 $\left\{f_i^{(n)}:j=1,2,\cdots,2^n\right\}$ 先按 n 后按 j 的顺序逐个地排成一列：

$$f_1^{(1)}(x),f_2^{(1)}(x),\cdots,f_1^{(n)}(x),f_2^{(n)}(x),\cdots,f_{2^n}^{(n)}(x),\cdots.$$

任给 $\sigma>0$ 当 $\sigma>1$ 时，$E[|f_j^{(n)}-0|\geq\sigma]=\varnothing$ 当 $0<\sigma\leq1$ 时，$E[|f_j^{(n)}-0|\geq\sigma]=\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right]$;因此 $m(E[|f_j^{(n)}-0|\geq\sigma])\leq\dfrac{1}{2^n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}m(E[|f_j^{(n)}-0|\geq\sigma])=0$，即 $\left\{f_j^{(n)}\right\}$ 依测度收敛于 0。

任取 $x_0\in(0,1]$, 不管 n 多大，总存在 j，使 $x_0\in\left(\dfrac{j-1}{2^n},\dfrac{j}{2^n}\right]$, 故 $f_j^{(n)}(x_0)=1$ 且 $f_{j+1}^{(n)}(x_0)=0$ 或 $f_{j-1}^{(n)}(x_0)=0$，即 $\left\{f_{j-1}^{(n)}(x_0)\right\}$ 中有两个子列收敛但极限不相等，故函数列 $\left\{f_{j-1}^{(n)}\right\}$ 在 $(0,1]$ 中任何点都发散。

反过来，几乎处处收敛能否蕴含依测度收敛？ 下面例子说明答案是否定的。

例 5[6] 设 $E=(0,\infty)$，定义函数列 $f_n(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,n]\\ 0, & x\in(n,\infty)\end{cases}n=1,2,\cdots.$ 可知 $f_n(x)\to1(n\to\infty)$ 任给 $0<\sigma<1$, $E[|f_n-1|\geq\sigma]=(n,\infty)$ 且 $m(n,\infty)=\infty$, 即 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上不依测度收敛于 1。

例 4 和例 5 说明，依测度收敛和几乎处处收敛之间区别很大，不能相互推出，但里斯定理和勒贝格定理又反映了它们之间存在着密切关系。

3 勒贝格积分的性质

引入勒贝格积分的目的就是为了克服黎曼积分存在的一些缺陷，特别是积分换序的问题。在实变函数教材中，给出勒贝格积分的概念后，重点介绍了勒贝格积分的性质。通过学习这些性质，体会勒贝格积分的强大。

首先，法图引理和勒贝格控制收敛定理表明，勒贝格积分在处理极限运算与积分运算交换顺序时，所要求的条件比黎曼积分要弱得多。具体内容如下：

定理 5[6] 设 E 为可测集，$\{f_n\}$ 为 E 上一列可测函数，则 $\int_E \varliminf_{n\to\infty} f_n(x)dx \le \varliminf_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$

定理 6[6] 设 E 为可测集，$\{f_n\}$ 为 E 上一列非负可测函数，F 是 E 上非负勒贝格可积函数，如果对于任意的正整数 n，$|f_n|\le F$ 几乎处处于 E

且 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ 几乎处处于 E，则

$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx.$

需要强调的是，定理 5 中不能将“≤”改为“=”。

例 6[8] 考虑区间 $E=[0,1]$ 上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases} n, & x\in(0,\frac{1}{n}) \\ 0, & x\notin(0,\frac{1}{n}) \end{cases} \quad n=1,2,\cdots.$$

则对任意 $x\in E$，有 $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$，故 $\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx=0$。

但 $\int_E f_n(x)dx=\int_{(0,\frac{1}{n})} ndx+\int_{[\frac{1}{n},1]} 0dx=1,$

故 $\int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx<\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx$

在定理 6 中，非负可积函数 F 称为 $\{f_n\}$ 的控制函数，这里控制函数的可积性条件不能去掉。

例 7[9] 考虑区间 $E=(0,\infty)$ 上的函数列

$f_n(x)=\frac{1}{n}\frac{1}{(1/n)^2+x^2}$。显然，对任意 $x\in E$，

有 $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ 但 $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\frac{\pi}{2}\neq\int_E 0dx$。

尽管函数列处处收敛，但极限和积分不能交换顺序，其原因在于不存在勒贝格可积的控制函数。

5 结语

本文结合实变函数课程的具体内容，针对一些重要的概念和定理进行了注释说明，并通过例举反例让学生更清晰、更直观的理解掌握。在教学中，恰当地运用反例，能够让学生正确辨析概念之间的关系、深刻理解并运用基本定理解决实际问题，从而提升学生综合素养，进一步提高教学质量。

参考文献：

[1] 冯淑霞．实变函数课程教学中的反例应用 [J]．高等数学研究，2015，18(1): 112−114.

[2] 黄金锐 . 实变函数中的若干反例 [J]. 数学学习与研究 ,2015, (03): 85+87.

[3] 沈春芳，杨刘．论“实变函数”课程中的反例 [J]．科教文汇 ,2017，381(09): 50−51.

[4] 范洪福 , 范子杰 . 实变函数反例研究 (Ⅰ)[J]. 大学数学 ,2018,34(06): 52−55.

[5] 苏先锋，李晓萌．反例等在实变函数教学中的应用 [J]．淮北师范大学学报 (自然科学版)，2023，44(2): 83−87.

[6] 程其襄，张奠宙，胡善文等．实变函数与泛函分析基础 [M]．北京：高等教育出版社，2023.

[7] 杨力华．实变函数论教程 [M]．北京：科学出版社，2017.

[8] 郑维行，王声望．实变函数与泛函分析概要 [M]．北京：高等教育出版社，2022.

[9] 夏道行，吴卓人，严绍宗等 . 实变函数与泛函分析 [M]．北京：高等教育出版社，2023.

作者简介：许俊莲（1982— ），女，山西临汾人，教授，博士，主要从事小波分析在非参数统计估计中的应用等研究。

项目信息：陕西省宝鸡文理学院校级重点教改项目 (24JGZD10)。