ISSN：3080-2660
EISSN：3080-2679

矩阵在日常生活中的应用

盛晓玲

成都职业技术学院，四川 成都 610041

摘　要：线性代数研究最多最基本的便是矩阵。在日常生活中，矩阵无时无刻不出现在我们的身边，例如生产管理中的生产成本问题、人口的流动和迁徙、密码学、图论、生态统计学、以及在化工、医药、日常膳食等方面都经常涉及到的配方问题、超市物品配送路径等都和矩阵息息相关。

关键词：矩阵；生产成本；人口的流动和迁徙；密码学；生态统计学

0 引言

线性代数是高等数学的一个重要分支，是一门重要的基础理论课，是解决线性问题的有力工具，在数学、力学、物理学和技术学科中有各种重要应用。学习线性代数课程，不仅培养人们的抽象思维和数学建模能力，而且培养人们对研究对象进行有序化、代数化、可解化的处理方法。数学大师笛卡尔（R.Descartes）在其名著《思维的法则》中指出：一切问题可以化为数学问题，一切数学问题可以化为代数问题,一切代数问题可以化为方程组求解问题。《线性代数》课程包括行列式、矩阵、线性方程组、向量空间、特征值与特征向量，适宜高职高专院校所有专业学生学习，该课程在经济管理学科中存在广泛的应用，是参加专升本和自学考试的学生们必须学好的一门学科，是高职院校经济管理和工程类的专业课程的后续支撑，而且对于培养学生的逻辑思维能力、创新思维能力，提高学生分析问题、解决问题都有着非常重要的作用。由于线性问题广泛存在于科学技术的各个领域特，别是电子计算机使用的日益普遍的今天，矩阵更是重要的数学工具之一。

1 生产管理中的生产成本

某工厂生产三种产品,每种产品的原料费、工资支付、管理费等见表 1，每季度生产每种产品的数量见表 2。

表 1 生产单位产品的成本（元）

成本	产品		
	A	B	C
原料费	0.10	0.30	0.15
工资	0.30	0.40	0.25
管理费和其他	0.10	0.20	0.15

表 2 产品每季度产量

产品	季度			
	夏季	秋季	冬季	春季
A	4000	4500	4500	4000
B	2000	2600	2400	2200
C	5800	6200	6000	6000

该公司希望在股东会议上用一个表格直观地展示出以下数据：(1) 每一季度中每一类成本的数量；(2) 每一季度三类成本的总数量；(3) 四个季度每类成本的总数量。

我们用矩阵的方法考虑这个问题 . 这两张表格中的数据分别可表示为矩阵 M 和 P，再根据矩阵的乘法得到矩阵 MP。

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}0.10 & 0.30 & 0.15\\ 0.30 & 0.40 & 0.25\\ 0.10 & 0.20 & 0.15\end{pmatrix}$$

$$P=\begin{pmatrix}4000 & 4500 & 4500 & 4000\\ 2000 & 2600 & 2400 & 2200\\ 5800 & 6200 & 6000 & 6000\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow MP=\begin{pmatrix}1870 & 2160 & 2070 & 1960\\ 3450 & 3940 & 3810 & 3580\\ 1670 & 1900 & 1830 & 1740\end{pmatrix}$$

MP 的第一列表示夏季生产三种产品的总成本，

MP 的第二列表示秋季生产三种产品的总成本，

MP 的第二列表示秋季生产三种产品的总成本，

MP 的第二列表示秋季生产三种产品的总成本，

MP 的第一行元素表示四个季度中每一季度原料的总成本，

MP 的第二行元素表示四个季度中每一季度工资的总成本，

MP 的第三行元素表示四个季度中每一季度管理的总成本，

每一类成本的年度总成本由矩阵的每一行元素相加得到，每一季度的总成本可由每一列相加得到，表 3 汇总了总成本。

ISSN：3080-2660
EISSN：3080-2679

表 3 汇总成本（元）

成本	季度				
	夏季	秋季	冬季	春季	全年
原料费	1870	2160	2070	1960	8050
工资	3450	3940	3810	3580	14780
管理费和其他	1670	1900	1830	1740	7140
总计	6990	8000	7710	7280	29980

2 人口的流动和迁徙

设在一个大城市中的总人口是固定的。人口的分布则因居民在市区和郊区之间迁徙而变化。每年有 6% 的市区居民搬到郊区去住，而有 2% 的郊区居民搬到市区。假如开始时有 30% 的居民住在市区，70% 的居民住在郊区，问 10 年后市区和郊区的居民人口比例是多少？ 30 年、50 年后又如何？

这个问题可以用矩阵乘法来描述。把人口变量用市区 x_{ci} 和郊区 x_{si} 两个分量表示（i 为年份）。一年以后，市区人口为 $x_{c1}=(1-0.06)x_{co}+0.02x_{s0}$，郊区人口

$$x_{s1}=0.06x_{c0}+(1-0.02)x_{s0}。$$

用矩阵乘法来描述，设 $A=\begin{pmatrix}0.94 & 0.02\\0.06 & 0.98\end{pmatrix}$，$x_0=\begin{pmatrix}0.3\\0.7\end{pmatrix}$，可写成：

$$x_1=\begin{pmatrix}x_{c1}\\x_{c2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.94 & 0.02\\0.06 & 0.98\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.3\\0.7\end{pmatrix}=Ax_0=\begin{pmatrix}0.2960\\0.7040\end{pmatrix}$$

从初始到 k 年，此关系保持不变，因此上述算式的递推式为

$$x_k=Ax_{k-1}=A^2x_{k-2}=A^3x_{k-3}=\cdots=A^kx_0$$

利用矩阵计算得到：

$$x_1=\begin{pmatrix}0.2960\\0.7040\end{pmatrix},\quad x_{10}=\begin{pmatrix}0.2717\\0.7283\end{pmatrix},$$

$$x_{30}=\begin{pmatrix}0.2541\\0.7459\end{pmatrix}\quad x_{50}=\begin{pmatrix}0.2508\\0.7492\end{pmatrix}.$$

3 应用矩阵编制密码

密码学在经济和军事方面起着极其重要的作用，现在密码学涉及很多高深的数学知识。密码学中将信息代码称为密码，尚未转换成密码的文字信息称为明文，由密码表示的信息称为密文。从明文到密文的过程称为加密，反之为解密。

1929 年，希尔（Hill）通过矩阵理论对传输信息进行加密处理，提出了在密码史上有重要地位的希尔加密算法。下面我们介绍一下这种算法的基本思想。

【准备】若要发出信息 action，现需要利用矩阵乘法给出加密方法和加密后得到的密文，并给出相应的解密方法。

【假设】假设 26 个英文字母 A，B，C，…，Z 一一映射到数 1，2，3，…，26，例如，数 1 表示 A，数 2 表示 B，…数 11 表示 K，另外，用 0 表示空格，27 表示句号等；假设将单词中从左到右，每 3 个字母分为一组，并将对应的 3 个整数排成 3 维的行向量，加密后仍为 3 维的行向量，其分量仍为整数。

【加密、解密】若要发出信息 action，使用上述代码，数集 {1,3,20,9,15,14} 表示信息 action，这个信息（按列）写成一个 3×2 矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & 9\\3 & 15\\20 & 14\end{pmatrix}$。

第一步“加密”，现任选一个三阶的可逆矩阵 A，例如 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，于是将要发出的信息（或矩阵）经乘以变成“密码”后发出。

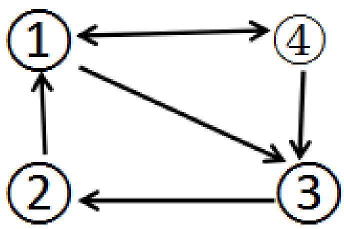
$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 1 & 2\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 9\\3 & 15\\20 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}67 & 81\\44 & 52\\43 & 43\end{pmatrix}=C$$

第二步“解密”，在收到信息 C 后，可予以解密（当然这里可逆矩阵 A 是事先约定的，这个可逆矩阵 A 称为解密的钥匙，或称为“密匙”）。即用矩阵 A 的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\2 & -2 & -1\\-1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 从密码中恢复明码：

$$A^{-1}C=\begin{vmatrix}0 & 1 & -1\\2 & -2 & -1\\-1 & 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}67 & 81\\44 & 52\\43 & 43\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 9\\3 & 15\\20 & 14\end{vmatrix}$$

接收者通过计算乘积 $A^{-1}C$ 来译出消息，即相继变换矩阵的第 1 列，第 2 列，…的元素就会变回到原来的信息，即可得到信息 action。我们选择不同的可逆矩阵 A（密钥），则可得到不同的密文。

4 网络和图



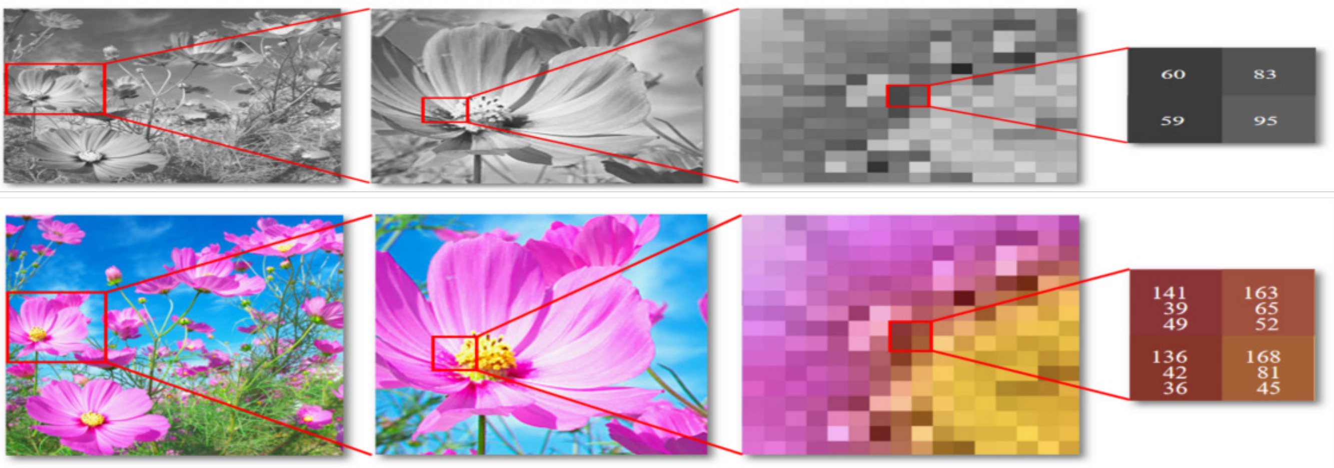
图为四个城市之间的空运航线，用有向图表示。则该图可以用下列航路矩阵 $A_1=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\1 & 0 & 1 & 0\end{vmatrix}$ 表示。

ISSN：3080–2660
EISSN：3080–2679

经过一次转机（也就是坐两次航班）能到达的城市，可以由邻接矩阵的平方来求得：

$$A_2=A_1A_3=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\end{pmatrix}=A_1^2$$

大数据时代的背景下，形式千变万化的数据（文本、图像和视频等）爆发式增长。如何简洁且统一地表示形式千变万化的数据是数据科学的基础问题之一。例如，如何用数学语言表示右图灰度图像和彩色图像？



新工科背景下，科技发展日新月异，但线性代数的经典概念和思维永远不会过时，只是在新工科背景下又有新的理解和阐释。

如下图所示，矩阵 A 和矩阵 B 分别表示不同的图像，他们的线性运算结果表示合成图像，我们可以观察到随着系数变化合成的图像也相应变化。

A $\quad 0.75A+0.25B \quad 0.5A+0.5B \quad 0.25A+0.75B \quad B$

矩阵乘积直观理解：给定矩阵 A 和矩阵 X，

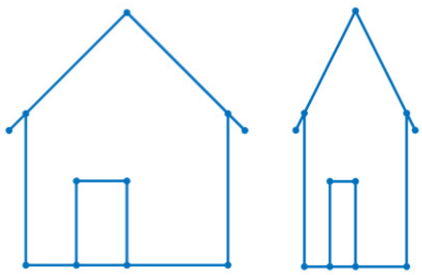
$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}-6\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$$

进一步，矩阵 A 与矩阵 X 的乘积可以直观理解为将二维空间的点 X 变换为二维空间的点 AX（点 x 轴坐标缩小一半和 y 轴坐标保持不变）。

$$AX=\begin{pmatrix}-3\\-7\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$$

同时观察到，变换前的点连接起来是房子的形状，而变换后的点连接起来是 x 轴坐标压缩一半和 y 轴保持不变的房子形状 .



如果 x = Cy 为正交变换，其中 C 为正交矩阵

$$C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt5}&\frac{2}{3\sqrt5}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{\sqrt5}&\frac{4}{3\sqrt5}&\frac{2}{3}\\0&\frac{5}{3\sqrt5}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

ISSN：3080-2660
EISSN：3080-2679

对 n 维向量作正交变换 x = Cy ，保持向量内积不变，因此也保持向量的长度与夹角不变，于是在正交变换下，几何图形的形状和大小不会发生改变，这是可逆变换所不具备的！

设 $$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}-6\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$$

AX 乘积如图：

若考虑正交矩阵， $$A=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

正交变换保持几何图形的形状和大小不改变。

5 生态学统计学

管理和保护许多野生物种依赖于我们模型化动态种群的能力。一个经典的模型化方法是将物种的生命周期划分为几个阶段。该模型假设每一阶段种群的大小仅依赖于雌性的数量，并且每一个雌性个体从一年到下一年存活的概率仅依赖于它在生命周期中的阶段，而不依赖于个体的实际年龄。例如，我们考虑一个 4 个阶段的模型来分析海龟的动态种群。

在每一阶段，我们估计出 1 年中存活的概率，并用每年期望的产卵量近似给出繁殖能力的估计，这些结果在表 4 中给出，在每一阶段名称后的圆括号中给出该阶段近似的年龄。

表 4 海龟种群统计的 4 个阶段

阶段编号	描述（以年为单位）	年存活率	年产卵量
1	卵、孵化期（<1）	0.67	0
2	幼年和未成年期（1-21）	0.74	0
3	初始繁殖期（22）	0.81	127
4	成熟繁殖期（23-54）	0.81	79

若 di 表示第 i 个阶段持续的时间，si 为该阶段每年的存活率，那么在第 i 阶段中，下一年仍然存活的比例将为 $$p_i=\left(\frac{1-s_i^{d_i-1}}{1-s_i^{d_i}}\right)s_i,$$

而下一年转移到第 i+1 个阶段时，可以存活的比例应为 $$q_i=\frac{x_i^{d_i}(1-x_i)}{1-x_i^{d_i}},$$

若令 ei 表示阶段 i（i=2，3，4）1 年中平均的产卵量，并构造矩阵

$$L=\begin{pmatrix}p_1 & e_2 & e_3 & e_4\\ q_1 & p_2 & 0 & 0\\ 0 & q_2 & p_3 & 0\\ 0 & 0 & q_3 & p_4\end{pmatrix},$$

则L可以用于预测以后每阶段海龟的数量，成为莱斯利矩阵，相应的种群模型通常称为莱斯利种群模型。利用表4给出的数字，模型的莱斯利矩阵为

$$L=\begin{pmatrix}0 & 0 & 127 & 79\\ 0.67 & 0.7394 & 0 & 0\\ 0 & 0.0006 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.81 & 0.8077\end{pmatrix},$$

假设初始时种群在各个阶段的数量分别为 20 0000、30 0000、500、1500. 若将这个初始种群数量表示为 x0，1 年后各阶段的种群数量可如下计算：

$$x_1=Lx_0=\begin{pmatrix}0 & 0 & 127 & 79\\ 0.67 & 0.7394 & 0 & 0\\ 0 & 0.0006 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.81 & 0.8077\end{pmatrix}\begin{pmatrix}200000\\ 300000\\ 500\\ 1500\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}182000\\ 355820\\ 180\\ 1617\end{pmatrix}$$

2 年后各阶段的种群数量为：$x_2=L^2x_0$，

k 年后各阶段的种群数量为：$x_k=L^kx_0$，

为观察长时间的趋势，我们计算 x_{10}，x_{25}，x_{50} 结果归纳在表 5 中．这个模型预测，繁殖期的海龟数量将在 50 年后减少约 80%。

表 5 海龟种群预测

阶段编号	初始种群数量	10 年	25 年	50 年
1	200000	114264	74039	35966
2	300000	329212	213669	103795
3	500	214	139	68
4	1500	1061	687	334

矩阵就是一个数表，而这个数表可以进行变换，以形成新的数表。如果你了解原始数表的含义，而且你可以从中抽象出某种变化规律，你就可以用线性代数的理论对你研究的数表进行变换，并得出你想要的一些结论。上述例子是矩阵乘法与逆矩阵的应用，将线性代数与实际应用紧密结合起来。这些结论就可以直观的、简洁的数表形式展现在你眼前。运用矩阵数学知识解决成本问题、破译密码、建立模型来分析海龟的动态种群等等，进而运用到日常生活，乃至军事科技等领域，可见矩阵的作用是何其强大。

参考文献：

[1] 艾立新，高文杰 .《应用数学与实验》[M]. 北京：高等教育出版社 .2008.
[2] 康永强，陈燕燕 .《应用数学与数学文化》[M]. 北京：高等教育出版社 . 2011.
[3] 朱翔，傅小波，杨先伟 .《应用数学》下册（第二版）[M]. 北京：高等教育出版社 2018.
[4] 盛光进 .《实用工程数学》[M]. 北京：高等教育出版社 .2010.

ISSN：3080-2660
EISSN：3080-2679

[5] 黄廷祝.《线性代数》第二版 [M]. 北京：高等教育出版社 .2024.

作者简介：盛晓玲（1969—），女，汉族，重庆巫溪人，副教授，研究方向：大学数学教学改革。