

微积分课程中一道不定积分的多种解法

齐 琼

西北政法大学, 陕西 西安 710122

摘 要: 不定积分是微积分课程中重要的板块之一, 为后续的学习奠定基础。本文讨论了一道不定积分题的八种解法, 并对解题思路和使用方法进行了分析探讨。

关键词: 不定积分; 一题多解; 换元法

在微积分课程中, 不定积分是积分学的基础, 更是整个微积分中计算部分的重要板块, 它不仅是连接微分与积分的理论桥梁, 也是解决众多实际问题的计算基础。因此, 熟练掌握不定积分的计算, 被视为掌握微积分课程核心内容的一个关键指标。在不定积分的讲授中, 常用的方法有凑微分、分部积分、三角代换、有理函数分解等方法, 学生在掌握计算方法的同时, 需要通过习题的完成对知识点的掌握进行检验。在计算过程中找到结果, 仅代表对知识点的理解。如果能做到一题多解, 便是打破了“唯一正确解”的思维定势, 不仅可以提升解题技巧, 更是一种能锻炼学生多角度审视问题, 培养学生的发散思维能力与创造力。同时不同方法间的交叉验证, 也提供了最可靠的“验算”方式, 极大地提升了计算结果的严谨性。本文通过对一道不定积分例题分析, 运用多种方法进行计算, 帮助学生更深刻的掌握不定积分的运算技巧。

$$\text{例: 求 } I = \int \frac{x^3}{(1-x^2)^2} dx$$

解法一: 在不定积分的计算过程中, 如果分子的最高次幂比分母的最高次幂高, 我们可以通过构造, 让分子中出现与分母相同的形式, 达到对分式简化、降幂的目的, 然后利用积分公式完成积分计算。

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x[1-(1-x^2)]}{(1-x^2)^2} dx = \int \left(\frac{x}{(1-x^2)^2} - \frac{x}{1-x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-x^2)^2} d(1-x^2) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-x^2} d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x^2} - \ln|1-x^2| \right] + C \end{aligned}$$

解法二: 在计算不定积分的过程中, 如果对函数和它的导函数形式非常熟悉, 对计算有很大的帮助, 此时, 因为我们注意到

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x^2} \right)' = \frac{x}{(1-x^2)^2}, \text{ 所以所求积分可以整理为分部积分的形式, 即:}$$

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 d \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{1-x^2} \right) - \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x^2} \right) dx^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1-(1-x^2)}{1-x^2} \right) + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-x^2} \right) d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C_1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C_1 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1-x^2} + \ln|1-x^2| \right] + C \quad (\text{令 } C = C_1 - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

在不定积分的计算中, 换元法是同学们最常使用的方法之一, 换元法的本质, 就是有效地识别被积函数中隐藏的“复合函数”结构, 通过引入一个新的变量来简化它, 让被积函数变成一个我们所熟悉的基本积分形式。而具体换被积函数中的那一部分, 需要经过大量习题训练积累经验, 比如这个题目我们可以进行以下不同的换元方式完成计算。在计算时需要注意的是在计算完成后一定要“回带”成原来的变量形式。

$$\text{解法三: 令 } t = x^2, \text{ 则 } x = \sqrt{t}, \quad dx = d\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{t \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t}{(1-t)^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-t)^2} - \frac{1}{1-t} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1-t)^2} dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1-t} d(1-t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-t} + \frac{1}{2} \ln|1-t| + C = \frac{1}{2} \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{2} \ln|1-x^2| + C \end{aligned}$$

解法四：令 $t=1-x^2$ ，则 $x^2=1-t$ ， $x=\sqrt{1-t}$ ，

$$dx = d\sqrt{1-t} = -\frac{1}{2\sqrt{1-t}} dt$$

$$\begin{aligned} I &= -\int \frac{(1-t) \cdot \sqrt{1-t}}{t^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-t}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1-t}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \frac{1}{2} \left(\ln|t| + \frac{1}{t} \right) + C = \frac{1}{2} \left(\ln|1-x^2| + \frac{1}{1-x^2} \right) + C \end{aligned}$$

解法五：令 $t=\sqrt{1-x^2}$ ，则 $t^2=1-x^2$ ， $x dx = -t dt$ ，

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(1-t^2) \cdot (-t)}{t^4} dt = \int \frac{t^2-1}{t^3} dt = \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} \right) dt \\ &= \ln|t| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2} + C = \ln|\sqrt{1-x^2}| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} + C \\ &= \ln|1-x^2|^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} + C = \frac{1}{2} \left(\ln|1-x^2| + \frac{1}{1-x^2} \right) + C \end{aligned}$$

(在这里为了和其他解法的运算结果保持一致，我们利用对数函数的性质完成整理、变形)

解法六：令 $t=\frac{1}{1-x^2}$ ，则 $1-x^2=\frac{1}{t}$ ， $x dx = \frac{1}{2t^2} dt$ ，

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\frac{1}{1-x^2} \right)^2 x^2 \cdot x dx = \int t^2 \left(1 - \frac{1}{t} \right) \frac{dt}{2t^2} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} (t - \ln|t|) + C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x^2} - \ln \left| \frac{1}{1-x^2} \right| \right) + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x^2} + \ln|1-x^2| \right) + C \end{aligned}$$

解法七：在被积函数中，分母的最高次数 n 与分子的最高次数 m 之差大于 1 时，可以考虑使用倒代换。令 $x=\frac{1}{t}$ 后，分子分母同时乘以

的最高次幂，可以有效地“翻转”分子分母的次数关系，可能会得到一个更易于处理的有理分式，从而完成积分计算。

令 $x=\frac{1}{t}$ ，则 $dx = d\frac{1}{t} = -\frac{1}{t^2} dt$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\frac{1}{t^3}}{\left(1 - \frac{1}{t^2} \right)^2} \left(-\frac{1}{t^2} \right) dt = -\int \frac{1}{t(t^2-1)^2} dt \\ &= -\int \frac{t^2-(t^2-1)}{t(t^2-1)^2} dt = -\int \frac{t}{(t^2-1)^2} dt + \int \frac{1}{t(t^2-1)} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t^2-1)^2} dt^2 + \int \frac{t^2-(t^2-1)}{t(t^2-1)} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t^2-1)^2} d(t^2-1) + \int \frac{t}{t^2-1} dt - \int \frac{1}{t} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{(t^2-1)^2} d(t^2-1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2-1} d(t^2-1) - \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2-1} + \frac{1}{2} \ln|t^2-1| - \ln|t| + C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x^2} + \ln|1-x^2| \right) + C \end{aligned}$$

解法八：当我们遇到被积函数中包含 $\sqrt{a^2-x^2}$ 、 $\sqrt{a^2+x^2}$ 、 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的形式时，可以选择三角函数换元积分法，这样我们就可以消除根号，将代数问题转化为三角函数问题，而关于三角函数的运算有很多公式可以用，便于我们完成积分计算，再回代时可以借助画一个直角三角形的方法，将有参量的三角函数换回原始的变量即可。

令 $x = \sin t$ ， $dx = d \sin t = \cos t dt$ ，

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^3 t}{(1-\sin^2 t)^2} \cos t dt = \int \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} \cos t dt = \int \tan^3 t dt \\ &= \int \tan t \cdot \tan^2 t dt = \int \tan t \cdot (\sec^2 t - 1) dt = \int (\tan t \sec^2 t - \tan t) dt \\ &= \int \tan t d \tan t - \int \tan t dt = \int \tan t d \tan t - \int \frac{1}{\cos t} d \cos t \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 t - \ln|\cos t| + C = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{1-x^2} + \ln|1-x^2| \right) + C \end{aligned}$$



在变量“回带”时，借助右图得到

$\tan t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ， $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ ，将结果代入即可得到最终的答案。

综上，通过八种不同的方法完成了这道不定积分的计算，我们知道，不定积分的一题多解，其好处远不止于“多会几种方法”。它是一个主动建构知识、发展思维、提升素养的过程。可以让学生从被动的“解题者”转变为主动的“探索者”，从一个更高的视角来审视和驾驭微积分的工具。

当我们尝试着用不同的方法去完成同一道积分题时，实际上是尝试着从不同的角度考虑同一个数学问题，此时我们会发现，不同的计算方法并不是孤立存在的，他们之间是彼此关联的。我们可以通过对比不同的解法之间的区别与联系，能深层次的理解所用方法为什么是有效的，它们的本质是什么，它们之间的逻辑又是什么。当我们只用一种方法完成计算，可能只是掌握了课本中的基本方法，但是若用不同的方法得到同一个答案，或者经过运算、简化后是相同的，那么可以百分百保证答案是正确无误的，这种通过努力解决问题所带来的信心是单一解法无法给予的。如果不同的方法计算出不同的结果，就会促使我们回头去检查每一步的运算，找出忽视的计算失误、符号错误或者公式表达式记忆有误等等，而这个寻找漏洞的过程是难得的巩固知识的机会。

数学是思维的体操，一题多解能让我们避免养成生搬硬套公式、模仿例题的习惯，通过多角度、全方位的观察问题、分析问题，使我们的思维更加敏捷，解决问题的方法更加灵活，让我们从众多方法中找到最简便的方法。而选

用最简便的方法解题的过程，正是创造性思维得到训练的过程。因此，在学习和教学中，积极鼓励和探索一题多解，是通向深刻理解和灵活运用数学的必经之路。

参考文献：

- [1] 吴赣昌.微积分(上册)[M],中国人民大学出版社.
- [2] 同济大学数学系.高等数学(上册)[M],高等教育出版社.
- [3] 黄志强,郭妞萍,刘光荣.一道积分题的多种解法及探讨[J],高等教学研究,2021(11)49-51.
- [4] 凌婷.一题多解在不定积分教学中的应用探析[J],大学,2020(12),46-47.
- [5] 任丽萍.一道不定积分题的一题多解[J],2022(06)41-42.
- [6] 胡新利,王凯明.一题多解对学生创造性思维的培养[J],高等数学研究,2021(11)42-43.

作者简介: 齐琼(1981.11—)女,汉,陕西延安,讲师,硕士研究生,研究方向:基础数学及应用。

项目信息: 本文系2025年西北政法大学本科教育教学改革研究项目,项目名称是:基于“课程思政”理念的微积分课堂教学改革(XJYZ202523)。