

AI浪潮下的高等代数课程建设: 理念重构、路径探索与 GPT 范式融合

陈佳蕾 徐 翰 殷晓娟

北京工业大学, 北京 100124

摘要: 生成式 AI(AI) 的迅猛发展, 对以逻辑严密和抽象思维为核心的高等代数课程提出了严峻挑战, 同时也带来了前所未有的改革机遇。本文旨在构建一个以“智能增强”为核心理念的高等代数精品课程建设新范式。将 GPT (生成式预训练转换器) 大语言模型背后的矩阵运算作为贯穿始终的核心教学案例与驱动范式, 系统性地探讨了课程目标的重构、教学内容的融合、教学方法的创新与评价体系的改革。通过将抽象数学概念与顶尖科技应用相连接, 本课程建设方案本质上在于激发学生内驱力, 培养其扎实的数学根基、卓越的抽象思维能力以及在智能时代至关重要的计算素养与创新应用能力, 为新时代数学类课程的改革提供了一套可借鉴的实践路径。

关键词: 高等代数; AI; 精品课程; 教学改革; GPT 模型; 智能素养

0. 引言

我们正身处一场由 AI, 特别是大语言模型所引领的技术革命浪潮。ChatGPT、DeepSeek 等工具的横空出世, 不仅改变了信息获取与处理方式, 更对传统教育模式, 尤其是数学教育, 产生了深远的影响。高等代数作为数学类专业的基础核心课程, 其内容高度抽象, 以线性空间、线性变换和矩阵理论为主体, 长期以来面临着教学方式单一、学生畏难情绪严重、理论与现实应用脱节等“难教难学”困境。AI 浪潮的冲击, 使得这些困境被急剧放大: 学生可能利用 AI 工具瞬间获得答案, 从而绕过至关重要的思维训练过程, 导致基础计算能力与抽象思维能力的双重弱化, 加剧对核心数学思想与逻辑框架的体系化认知的缺乏。

然而, 危机之中亦蕴藏生机。一个引人深思的悖论是: 这些看似能“解决”所有数学问题的 AI, 其本身正是建立在高等代数核心概念之上的复杂计算系统。以 GPT 模型为例, 其智能的涌现, 并非魔法, 而是大规模矩阵运算的必然结果。词嵌入是向量空间的直观体现, 前向传播是矩阵乘法的链式复合, 而强大的自注意力机制, 其本质更是一系列矩阵 (查询 Query, 键 Key, 值 Value) 的乘法、转置与 Softmax (归一化指数函数) 变换。这为高等代数课程改革提供了一个千载难逢的历史机遇: 将课程从“解题技巧”的训练场, 转变为“解密智能黑箱”的钥匙。

当前, 国内外关于 AI 辅助数学教学的研究多集中于工具使用或零星案例的应用^[1-5], 将前沿 AI 模型作为核心教学主线进行系统性课程建设的实践甚少。本文核心研究问题是: 如何系统性地建设一门以“智能增强”为理念, 以揭示 AI (如 GPT) 数学本质为驱动, 能有效培养学生面向未来核心竞争力的高等代数精品课程? 本研究不仅具有深化智能时代数学教育理论的学术价值, 更旨在为一线教师提供一套包

含核心理念、具体内容、教学案例与评价方法的、可落地的课程建设方案。

1. AI浪潮下的解构与重构: 挑战、机遇与“智能增强”理念

1.1 现实挑战: 传统教学模式的冲击

首先, 威胁学生的基础计算与符号操作能力。行列式计算、矩阵求逆、多项式因式分解等传统练习, AI 能在毫秒内完成, 易使学生产生依赖, 削弱其手算功底和对算法本身的理解。

其次, 干扰抽象数学思维的养成。数学学习的精髓在于从具体到抽象的跃迁以及严谨的逻辑推理。AI 提供的“即食答案”剥夺了学生在“挣扎”与“试错”中领悟概念本质、构建知识体系的宝贵过程, 使得数学思维的形成面临中断风险。

再次, 将重新定义学术诚信边界。如何区分合理利用 AI 进行学习辅助与抄袭、作弊行为, 成为课程管理必须面对的新课题。

最后, 挑战教师的角色定位。当知识传递和解题示范不再是教师的唯一权威时, 教师必须重新寻找其在教学共同体中的不可替代价值。

1.2 历史机遇: 从“无用之学”到“智能基石”的认知革命

面对挑战, 我们更应洞察其中蕴含的巨大机遇。其中, 最具颠覆性的机遇在于: 能以前沿应用为镜, 重塑学生对课程价值的认知。

解放师生, 聚焦高阶思维。AI 能自动化处理繁琐的计算, 使教师和学生能将宝贵的课堂时间和认知资源投入到更高级的活动中, 如概念辨析、定理证明的构思、知识体系的构建以及解决开放性问题。

实现个性化与自适应学习。基于 AI 的学习平台可以分析学生的作业数据, 精准定位知识薄弱点, 并提供定制化的学习材料和练习路径, 实现真正的因材施教。

动态可视化赋能抽象概念。AI技术可以生成矩阵特征变换、向量空间张成、二次型曲面等内容的交互式图形,将抽象概念转化为可视、可操作的直观对象,降低认知负荷。

以GPT为范例,让理论“活”起来。这是本轮课程改革最有力的抓手。通过向学生揭示:GPT的“思考”过程,就是一系列他们正在学习的高等代数运算——词汇是向量,句子是矩阵,神经网络层是线性变换,注意力机制是矩阵乘法的组合,能够瞬间将高等代数从“无用抽象”提升为“理解现代科技核心”的必备工具,极大激发学生的学习内驱力和成就感。

1.3 核心理念:确立“智能增强”教育观

基于以上分析,本课程建设的核心理念是“智能增强”而非“智能替代”。其内涵包括:

目标转变:从知识传授转向思维赋能,目标是培养能驾驭AI而非被AI替代的人才。

关系重塑:构建“教师-AI-学生”三元协同的教学共同体。教师是课程的设计者、学习的引导者和AI应用的示范者;AI是强大的认知工具和学习伙伴;学生是积极的探究者和知识的意义建构者。

素养导向:最终目标是培养学生具备扎实的数学内核、熟练的AI工具应用能力以及批判性审视技术的智能伦理素养。

2. “智能增强”型课程的系统化建设:目标、内容与方法的融合创新

2.1 课程目标的三维分布式重构

在新的理念下,课程目标需从三个维度进行分布式重构:

知识维度:保持不变的是对线性空间、线性变换、矩阵、特征值等核心概念的深刻理解与掌握。

能力维度:新增“AI工具下的计算验证与探究能力”、“将现实问题(如自然语言处理)转化为数学模型的能力”以及“批判性评估AI输出合理性与局限性的能力”。

素养维度:强调“智能伦理”和“跨学科沟通素养”,使学生能够认识、理解,并阐释模型背后的数学原理。

2.2 教学内容的范式融合与案例驱动

为实现上述目标,教学内容需要进行深度整合与创新,构建“核心-拓展-专题”三级体系。

核心模块:确保理论体系的严谨性与完整性,这是学生进行一切高阶应用和批判性思考的基石。

拓展模块:有机嵌入AI应用案例,例如:讲解矩阵分解时,引入奇异值分解在推荐系统与图像压缩中的应用;讲解特征值时,引入主成分分析在数据降维中的作用。

专题模块:解密GPT-从矩阵运算到智能涌现。此模块是连接抽象理论与前沿科技的关

键,具体设计如下:

2.2.1 概念映射教学

· 向量空间→词嵌入:讲解词汇如何被表示为高维空间中的点,语义相似度表现为向量余弦相似度。

· 矩阵与线性变换→神经网络层:阐释GPT的每一全连接层都是一个线性变换($y = Wx + b$),通过权重矩阵 W 对输入信息进行空间变换。

· 矩阵乘法→前向传播:剖析模型从输入到输出的过程,本质是输入矩阵与一系列权重矩阵的连续乘法,并穿插非线性激活函数(如ReLU, GELU)。

· Softmax函数→概率输出:讲解Softmax如何将自注意力机制输出的分数矩阵转化为概率分布,从而决定词汇生成的权重。

2.2.2 公式推导:手撕自注意力机制

带领学生循序渐进推导自注意力公式:

$$\text{Attention}(Q, K, V) = \text{softmax}(QK^T \sqrt{d_k})V.$$

(1) 定义输入序列矩阵 X 。

(2) 通过可学习权重矩阵 W_Q, W_K, W_V ,

得到查询、键、值矩阵:

$$Q = XW_Q, K = XW_K, V = XW_V.$$

(3) 计算 QK^T ,得到注意力分数矩阵,表示序列中每个词对其它所有词的关注程度。

(4) 使用 $\sqrt{d_k}$ 进行缩放,防止内积过大导

致梯度消失,随后应用Softmax归一化。

(5) 将归一化后的权重矩阵与 V 相乘,得到加权后的输出矩阵。

这个过程完美展示了矩阵乘法、转置、缩放和归一化运算如何协同工作,实现上下文感知。

2.2.3 实践感知

鼓励学有余力的学生使用Python的NumPy库,编写代码实现一个微型的前向传播过程或一个单头的自注意力计算,从“纸上谈兵”走向“亲手铸造”,深化理解。

2.3 教学方法的“人机协同”实践

教学方法需与内容改革相匹配,推行“人机协同”的混合式教学。

翻转课堂2.0:课前,学生观看关于GPT基本原理的视频,并利用AI工具初步探究“如何用矩阵表示一句话”等问题。课内,进行深度的小组讨论、协作解决问题以及教师的精讲点拨。

项目式学习:设计如“基于自注意力机制的简易文本情感分析模型”等项目。学生以小组为单位,完成从数学原理分析、模型简化设计(重点在矩阵运算部分)、到代码实现与结果分析的全过程。

案例教学法:以GPT为锚点案例,在整个

课程中反复呼应。讲矩阵乘法时,分析其计算复杂度为何是 GPT 耗能巨大的根源;讲特征值时,引导学生思考在神经网络变换中是否存在“固有方向”。

同伴教学与辩论:故意使用 ChatGPT 求解一个稍有难度的高等代数问题,并让其生成一个错误的证明,然后组织学生分组寻找并批判其中的错误,以此锻炼其批判性思维。

2.4 教学资源的立体化构建

支撑上述教学实践需要立体化的资源体系:

动态可视化资源库:开发或收集关于特征向量变换、矩阵对向量空间的作用、SVD 分解等内容的交互式动画。

智能自适应题库:题库应能根据学生表现动态生成不同难度的题目,并包含与 AI 应用相关的分析性、设计性题目。

专属资源包:制作“GPT 中的矩阵运算”资源包,包含原理示意图、公式推导手册、仿真代码示例与讲解视频,成为学生自主学习的宝贵材料。

3. 指向核心素养的课程评价体系改革

为全面评估新课程目标达成度,评价体系必须从单一的期末考试向过程化、多元化转变。

评价原则为强调过程性评价,注重能力表现,采用多元评价主体与工具。

具体评价方式可包含:

笔试革新。大幅减少机械计算题,增加概念辨析题、证明题以及如“请阐述矩阵的秩在衡量模型表达能力中的可能意义”等开放应用题。

项目报告与展示。评价学生在项目中对数学原理的应用深度、AI 工具的使用合理性、团队协作与成果展示能力。

“开卷+AI”式考核。在部分考试或大作业中,允许学生使用指定 AI 工具,任务设计为需要复杂问题分解、策略选择和结果评判的综合性问题,考察其驾驭 AI 解决问题的能力。

参考文献:

- [1] 张林泉.人工智能背景下高等数学教学探索与实践——基于计算思维与辩证法的视角[J].高等数学研究,2022(4):36-40.
- [2] 贾晓彤,王利岩,赵晓丽,吴玉斌,杨盛武,吕振华.人工智能赋能高等数学课程教学模式的探索和实践[J].创新教育研究,2025,13(7):230-233.
- [3] 刘颖,韦康.《高等代数》课程的智能化转型与创新的探索和实践[J].创新教育研究,2025,13(6):573-579.
- [4] 张丽,武燕.基于知识图谱的 AI 智慧型混合式高等数学课程建设研究[J].教育进展,2024,14(12):359-365.
- [5] 宋涛.新工科背景下应用型本科高校高等代数课程教学改革探索——以数据科学与大数据技术专业为例[J].科技风,2021,35:184-186.

作者简介:陈佳蕾(1982—),女,汉族,博士研究生,副教授,研究方向:环与代数。

项目信息:北京工业大学一流本科课程建设课项目。

4. 实施保障与挑战应对

任何课程改革的成功都离不开坚实的保障体系。

(1) 教师发展:通过工作坊、集体备课等形式,对教师进行 AI 素养培训,使其熟练掌握相关工具,并成功转型为课程设计师和学习导师。

(2) 技术支持:与学校信息中心合作,搭建稳定、安全、易于使用的数学智能教学平台,集成可视化、编程环境和 AI 交互功能。

(3) 学术诚信:制定清晰的《课程 AI 使用公约》,明确界定允许和禁止的行为。更重要的是,通过设计需深度理解和个人创见的任务,从源头上杜绝抄袭的可能。

(4) 迭代机制:建立常态化的课程反馈回路,通过问卷调查、学生访谈和学习数据分析,持续评估教学效果,并据此对课程内容与方法进行敏捷迭代。

5. 结论

本文系统地构建了一个在 AI 浪潮下,以“智能增强”为理念、以 GPT 模型的数学原理为典型范式的高等代数精品课程建设方案。该方案不仅回应了技术变革带来的挑战,更通过将顶尖科技应用深度反哺于基础理论教学,成功地重塑了高等代数的课程价值与学习体验。实践证明,这种以“解密智能”为驱动的教学模式,能有效激发学生的内在动机,培养其面向未来的核心竞争力。

展望未来,AI 与数学教育的融合必将愈发紧密。一方面,我们可以期待 AI 驱动的虚拟数学实验室,能够为学生提供更沉浸式的探究环境。另一方面,随着 AI 模型的演进,更深刻的数学概念,如张量、流形、李群等,将在下一代 AI 中扮演更关键的角色。高等代数作为这一切的基础,其课程建设必须保持开放与发展的姿态,持续追踪科技前沿,将新的数学思想与应用反哺教学,唯有如此,才能永葆其作为一门现代精品课程的活力与生命力。